

Corrigé des exercices Rallye Mathématique d'Alsace 2009
Terminale

Exercice 1:

L'énoncé se traduit par le système (S) d'inéquations:
$$\begin{cases} A \geq 2n \\ 200 \leq L \leq 300 \\ A \times L \times n = 50\,127 \\ L \geq 7A \end{cases}$$

Condition sur A : $7A \leq L \leq 300 \Leftrightarrow A \leq 42$.

Condition sur n : $7 \times 2n \leq 7A \leq L \leq 300 \Leftrightarrow n \leq 21$.

Condition sur An : $200An \leq AnL \leq 300An \Leftrightarrow 168 \leq An \leq 250$.

Puisque $AnL = 50\,127$, on cherche dans la décomposition en facteurs premiers de 50 127, les produits compris entre 168 et 250.

$$50\,127 = 3 \times 7^2 \times 11 \times 31$$

Seuls les produits $3 \times 7 \times 11$ et 7×31 conviennent.

- Si on pose $A=31$; $n=7$ alors $L=231$.
ce triplet vérifie toutes les inéquations du système (S) donc il existe au moins un triplet-solution.
- En testant toutes les possibilités avec le choix $An=3 \times 7 \times 11$, il n'y a aucun triplet-solution de (S).

L'esquimaux a bien raison:

Il a 31 ans, son traîneau mesure 2,31 m et son attelage a 7 chiens.

Exercice 2:

1. Réseau à un seul noeud:

La longueur totale du réseau est $MA+MB+MC+MD$.

D'après l'inégalité triangulaire: $MA+MC \geq AC$ avec égalité si et seulement si le point M appartient au segment $[AC]$.

Comme on cherche le chemin de longueur minimal, le point M doit appartenir au segment $[AC]$.

De même pour minimiser $MB+MD$, le point M doit appartenir au segment $[BD]$.

Donc la longueur du réseau est minimale lorsque M est le point d'intersection de $[AC]$ et $[BD]$, soit le centre du carré $ABCD$.

La longueur du réseau sera $L_1 = 2AC = 2\sqrt{2}a$.

2. Réseau à 2 noeuds:

a. $ABCD$ est un carré de centre O .

Soient I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$ puis M et N les milieux respectifs des segments $[OI]$ et $[OJ]$.

La longueur totale du réseau est $L_2 = MA+MD+NC+NB+MN$.

En appliquant le théorème de Pythagore, on obtient $L_2 = a\left(\sqrt{5} + \frac{1}{2}\right)$ et $L_1 > L_2$.

Un circuit à 2 noeuds peut donc fournir un meilleur résultat que précédemment.

b. En conservant les mêmes notations qu'au 2..a. et en notant α l'angle \widehat{ABM} avec $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

Longueur MN:

$$IM = IB \tan \alpha = \frac{a}{2} \tan \alpha ; \quad NJ = IM ; \quad MN = -(NJ + IM) = a(1 - \tan \alpha) .$$

Longueur MB :

$$IB = MB \times \cos \alpha = \frac{a}{2} \quad \text{donc} \quad MB = \frac{a}{2 \cos \alpha} .$$

Longueur totale du réseau: $f(\alpha)$

$$f(\alpha) = MN + 4 \times MB = a(1 - \tan \alpha) + 4 \frac{a}{2 \cos \alpha} = a \left(1 + \frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \right) .$$

Etude de la fonction f sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$:

$$f'(\alpha) = a \left(\frac{2 \sin \alpha - 1}{\cos^2 \alpha} \right) .$$

$$f'(\alpha) \leq 0 \quad \text{pour} \quad \sin \alpha \leq \frac{1}{2} \quad \text{soit} \quad \alpha \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right] , \quad \text{et} \quad f'(\alpha) \geq 0 \quad \text{pour} \quad \alpha \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right] .$$

La fonction f admet un minimum sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ atteint en $\frac{\pi}{6}$, ce minimum est égal à

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = a(1 + \sqrt{3}) .$$

Le réseau symétrique à 2 noeuds de longueur minimale est tel que $\widehat{ABM} = \frac{\pi}{6}$ et sa longueur est $a(1 + \sqrt{3})$.

Exercice 3 :

1. $R(n)$ nombre de chemins auto-évitants pour un échiquier composé de 3 lignes et n colonnes.

On vérifie directement que $R(1) = 1$ et $R(2) = 4$.

2. **Détermination d'une relation de récurrence pour le calcul de $R(n)$:**

On détermine tous les chemins possibles en notant $(i; j)$ la position de la case dans l'échiquier (i ème ligne, j ème colonne)

1. le chemin $(1; 1) \rightarrow (2; 1) \rightarrow (3; 1)$.
2. les chemins évitant la case $(2; 1)$: ces trajectoires doivent commencer par $(1; 1) \rightarrow (2; 1)$ et finir par $(3; 2) \rightarrow (3; 1)$. Il y a $R(n-1)$ tels chemins.
3. les chemins commençant par $(1; 1) \rightarrow (2; 1) \rightarrow (2; 2)$ et ne retournant jamais à la première ligne. Il y a $n-1$ chemins de cette sorte.
4. les chemins commençant par $(1; 1) \rightarrow (2; 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2; k) \rightarrow (1; k) \rightarrow (1; k+1)$ et se terminant par $(3; k+1) \rightarrow (3; k) \rightarrow (3; k-1) \rightarrow \dots \rightarrow (3; 2) \rightarrow (3; 1)$ pour $2 \leq k \leq n-1$.
Il y a $R(n-2) + R(n-3) + \dots + R(1)$ tels chemins.

5. les chemins commençant par $(1; 1) \rightarrow (1; 2)$ et n'entrent pas dans la troisième ligne avant la dernière case. Ces chemins finissent par $(2; 2) \rightarrow (2; 1) \rightarrow (3; 1)$.
Il y a $n-1$ chemins de cette sorte.
6. les chemins commençant par $(1; 1) \rightarrow (2; 1) \rightarrow \dots \rightarrow (2; k) \rightarrow (1; k) \rightarrow (1; k+1)$ et se terminant par $(3; k+1) \rightarrow (3; k) \rightarrow (3; k-1) \rightarrow \dots \rightarrow (3; 2) \rightarrow (3; 1)$ pour $2 \leq k \leq n-1$.
Il y a $R(n-2) + R(n-3) + \dots + R(1)$ tels chemins.

On obtient la relation :

$$R(n) = 1 + R(n-1) + 2((n-1) + R(n-2) + R(n-3) + \dots + R(1))$$

$$R(n) = 2n - 1 + R(n-1) + 2(R(n-2) + R(n-3) + \dots + R(1))$$

donc $R(n+1) = 2n + 1 + R(n) + 2(R(n-1) + R(n-2) + \dots + R(1))$

d'où: $R(n+1) - R(n) = 2 + R(n) + R(n-1)$

par conséquent: $R(n+1) = 2R(n) + R(n-1) + 2$ ou $R(n+2) = 2R(n+1) + R(n) + 2$

On vérifie que $R(3) = 2R(2) + R(1) + 2 = 11$.

De même $R(4) = 2R(3) + R(2) + 2 = 28$ et $R(5) = 2R(4) + R(3) + 2 = 69$

Pour déterminer $R(2009)$ on peut utiliser cette formule de récurrence...travail fastidieux mais possible !

3. Relation implicite pour $R(n)$:(non attendue)

Soit $u_n = R(n) + 1$. On obtient la relation $u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$ et $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$.

La suite (u_n) est définie par la relation linéaire de double récurrence.

Les suites géométriques vérifiant cette relation sont celles de raison $1 - \sqrt{2}$ et $1 + \sqrt{2}$.

Il existe alors deux réels a et b tels que $u_n = a(1 - \sqrt{2})^n + b(1 + \sqrt{2})^n$.

les deux réels a et b se déterminent à l'aide des deux premiers termes de la suite $u_1 = 2$ et $u_2 = 5$

Finalement $u_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1}$

et $R(n) = u_n - 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^{n+1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^{n+1} - 1$.

Vérification avec $n=3$: $R(3) = u_3 - 1 = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \sqrt{2})^4 - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1 - \sqrt{2})^4 - 1 = 11$.